

Teorema de la probabilidad total

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles 2 a 2, cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$) y B es otro suceso, resulta que::

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

Ejemplo

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?



• $p(\text{fundida}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$

Teorema de Bayes

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles 2 a 2, cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$) y B es otro suceso, resulta que::

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan **probabilidades a priori**.

Las probabilidades $p(A_i/B)$ se denominan **probabilidades a posteriori**.

Las probabilidades $p(B/A_i)$ se denominan verosimilitudes.

Ejemplos

- ⌚ El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?



$$P(\text{ingeniero} / \text{directivo}) = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.405$$

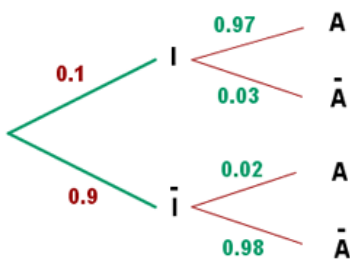
- ⊕ La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:

I = Producirse incidente.

A = Sonar la alarma.



$$P(\bar{I} / A) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.02} = 0.157$$

Ejercicios de Probabilidad Condicionada

1 Un estudiante cuenta, para un examen con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realiza el examen es 0.9 y, en caso contrario, de 0.5.

- 1 Si va a realizar el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?
- 2 Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

2 En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.

- 1 ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?
- 2 Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

3 Se supone que 25 de cada 100 hombres y 600 de cada 1000 mujeres usan gafas. Si el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres, se pide la probabilidad de encontrarnos:

- 1 Con una persona sin gafas.
- 2 Con una mujer con gafas.

4 En una casa hay tres llaveros A, B y C; el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

- 1 ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
- 2 ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
- 3 Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

5 Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25% se deben a la imprudencia del conductor y el resto a otras causas, (fallo mecánico...etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

- a) Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes no tenga resultado nefasto.
- b) Si se produce un accidente sin resultado nefasto, calcular la probabilidad de que la causa de dicho accidente sea la ingesta excesiva de alcohol. (Ejercicio PAU)