3º de ESO

Capítulo 10:

Funciones y gráficas.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Índice

1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO

1.1. EJES DE COORDENADAS O CARTESIANOS.
1.2. COORDENADAS CARTESIANAS.

2. FUNCIONES

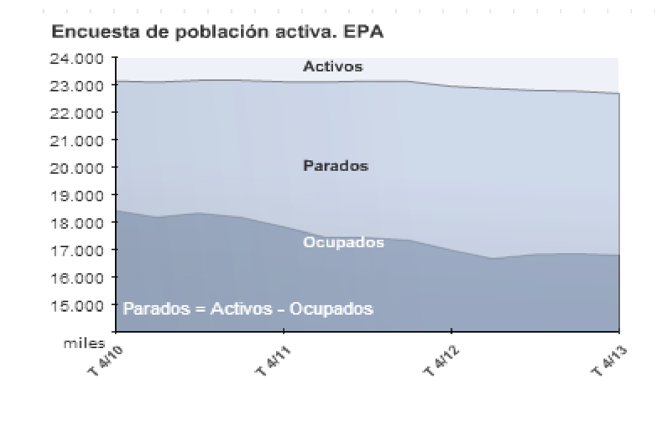
2.1. CONCEPTO INTUITIVO DE FUNCIÓN.
2.2. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN
2.3. EJEMPLOS DE FUNCIONES: FUNCIÓN AFÍN [redacted]

[redacted]

[redacted]

Resumen

El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, lo que las hace muy importantes.
Por ejemplo, las funciones sirven para poder explicar muchos fenómenos que ocurren en campos tan diversos como la Física, la Economía o la Sociología.



A pesar de las dificultades, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, por resultar entonces muy intuitivas, y eso es suficiente para poder analizar y resolver muchas cuestiones. Por ejemplo, si observamos la gráfica anterior no es difícil interpretar si el paro ha subido o si ha bajado en el cuarto trimestre entre dos años consecutivos, o globalmente a lo largo del periodo completo estudiado, o calcular dicho incremento/disminución o estudiar en qué año hubo más personas ocupadas o menos personas activas...

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

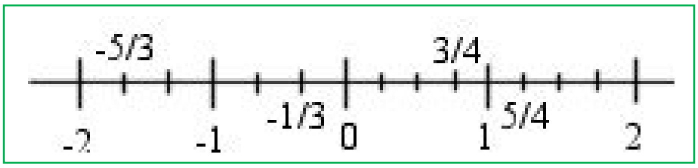
1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO.

1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos.

Recuerda que:

Cuando queremos representar gráficamente un número, normalmente los dibujamos sobre una recta, llamada *recta numérica*, en la cual establecemos un punto de referencia, que es el 0, a partir del cual trazamos los números positivos (hacia la derecha) y los negativos (hacia la izquierda).

Pues bien, si estamos trabajando con una única variable que toma valores numéricos y los queremos representar, lo haremos igualmente sobre dicha recta.



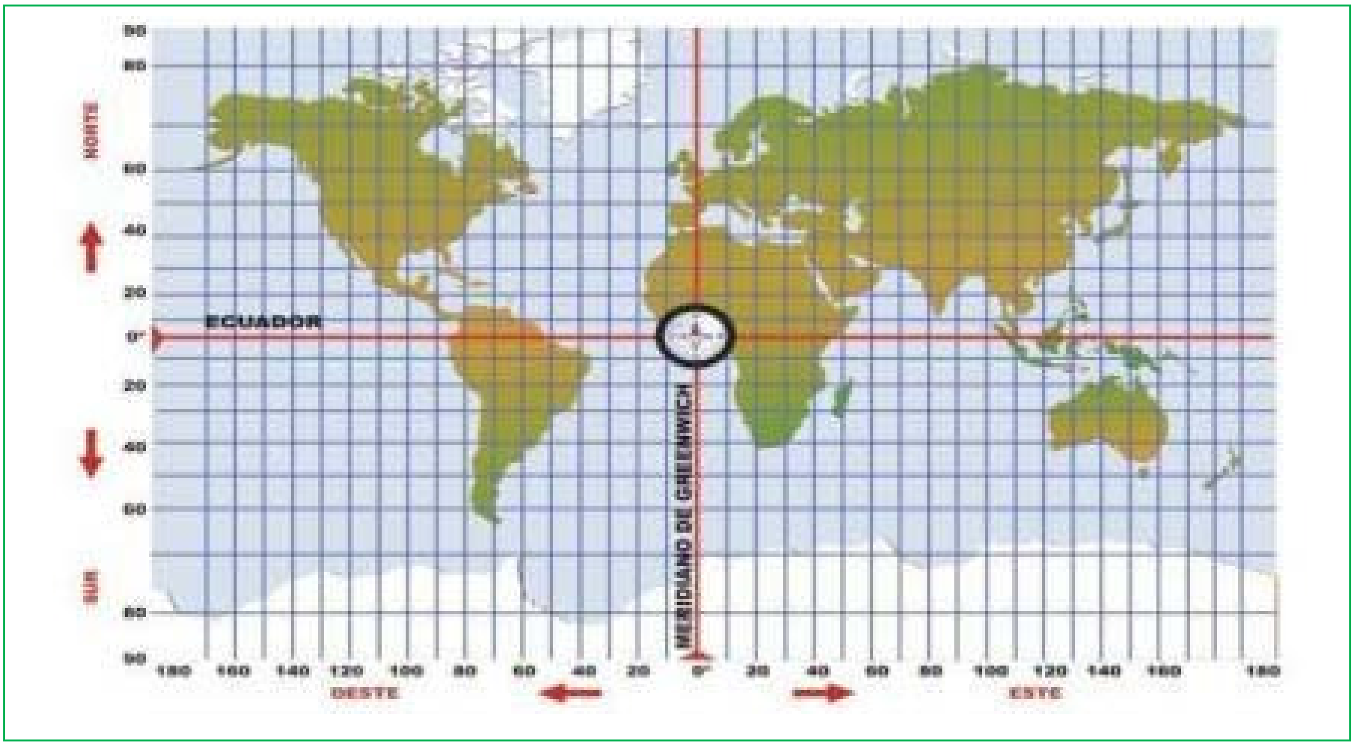
Es importante hacer notar que, como tenemos una única variable, necesitamos una única recta y, por tanto, estamos trabajando con una única dimensión (longitud).

En el plano:

Ahora bien, si trabajamos con objetos de dos dimensiones, en el plano, necesitamos dos valores para referirnos a ellos, ya que están determinados por su longitud y su anchura, que no tienen por qué ser iguales y que siguen direcciones diferentes.

Ejemplo:

- En un mapa, para poder situar un punto cualquiera (por ejemplo, una ciudad), tenemos una referencia a partir de la cual tomar las medidas: el paralelo del Ecuador y el meridiano de Greenwich. Ambos se cortan en un punto, que es el origen de este sistema de referencia:

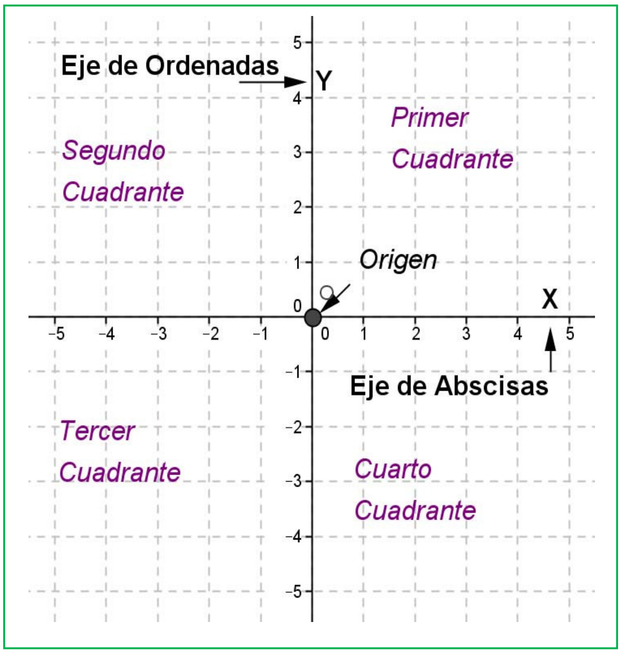


Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

De igual forma, si tenemos dos variables *que están relacionadas de alguna manera,* que toman valores numéricos y los queremos dibujar, tendremos que utilizar dos rectas o ejes diferentes (cada uno para los datos correspondientes a una variable) y que sean secantes, es decir, se cortan en un punto (sin el cual no se podría establecer la relación entre ambas).

Si las rectas se cortan de forma perpendicular, es más sencillo establecer la conexión entre valores, y las medidas que se representan en cada eje (salvo escalas) se pueden corresponder de forma directa con la realidad, por lo que siempre se suelen dibujar de esta forma (formando un ángulo de 90º entre sí).

El sistema de representación de puntos en el plano más común está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado ***eje de abscisas***, donde se representan los valores de la variable independiente (que toma los valores libremente, y que suele llamarse *"x"*), y otro vertical llamado ***eje de ordenadas***, donde se representan los valores de la variable dependiente (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse *"y"*). Ambos reciben el nombre de ***ejes de coordenadas*** o ***ejes cartesianos*** (en honor del famoso filósofo y matemático francés Renè Descartes). El punto donde se cortan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas*** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.



Un conjunto formado por el origen *O*, los dos ejes de coordenadas y la unidad de medida es un **sistema de referencia cartesiano**.

1.2. Coordenadas cartesianas.

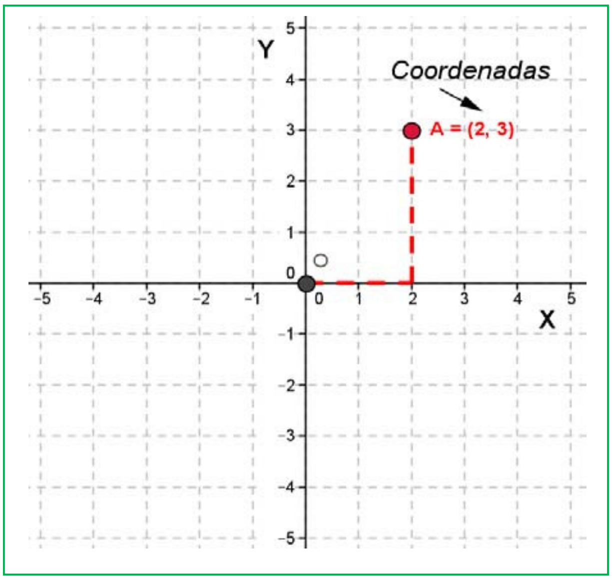
Una vez establecido el sistema de referencia con respecto al cual poder situar los puntos, para llegar a uno en concreto partimos del origen, "O", recorremos una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto queda determinado por un par de números, la medida de los caminos realizados en ambas direcciones, a los que llamamos **coordenadas del punto**.

Ejemplo:

- En un mapa como el del ejemplo anterior, un punto queda determinado por su *latitud* (distancia al Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por dicho punto) y la *longitud* (distancia al Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por dicho punto), llamadas *coordenadas geográficas*. Por ejemplo, la situación de Madrid es (–3,41; 40,24):

  Longitud –3,41 o 3,41 O, es decir, hay que trasladarse 3,41 hacia el oeste (izquierda) del meridiano de Greenwich.
  Latitud +40,24 o 40,24 N, es decir, hay que trasladarse 40,24 hacia el norte (por encima) del Ecuador.

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo ***“x”*** la primera coordenada o **abscisa** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical) e ***“y”*** la segunda coordenada u **ordenada** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal).
Cuando ese valor se toma hacia la izquierda o hacia abajo lo indicamos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha lo indicamos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.
De esta forma, cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas y viceversa, a toda pareja ordenada de números le corresponde un punto del plano.

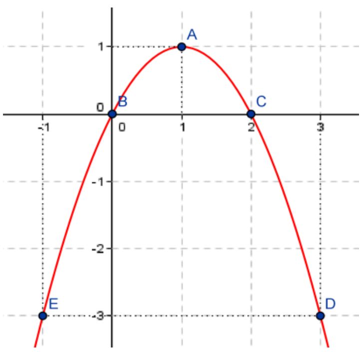


Ejemplo:

- En el gráfico anterior, el punto A tiene coordenadas (2, 3).

Actividades resueltas

- *En la siguiente gráfica, indica las coordenadas de los puntos señalados:*



***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

***C*(2, 0)**

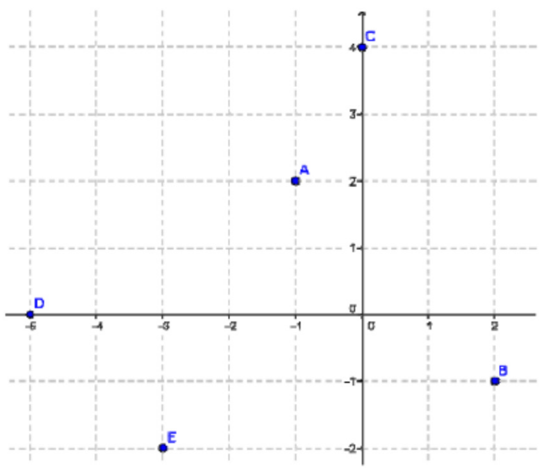
***D*(3, –3)**

***E*(–1, –3)**

- *Representa gráficamente los puntos*:

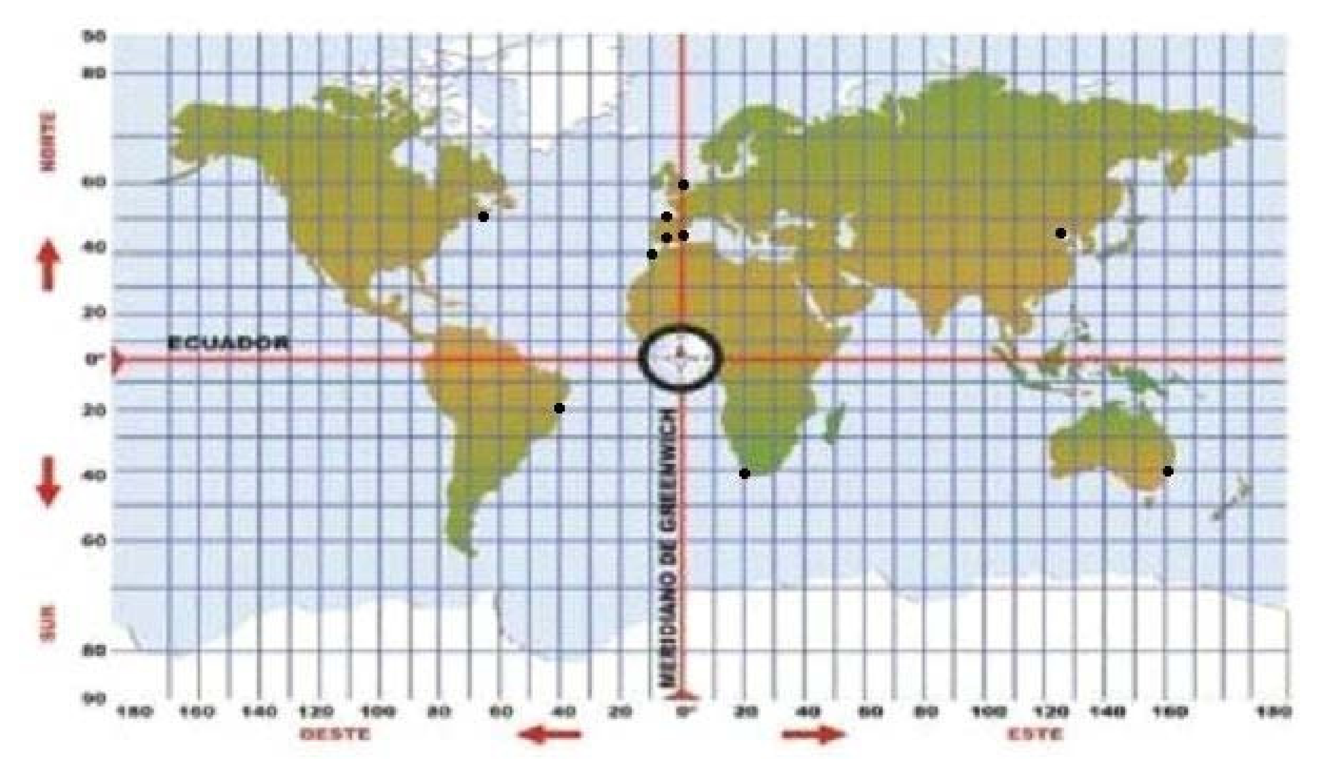
$A(-1,2); B(2,-1); C(0,4);$

$D(-5,0); E(-3,-2)$



Actividades propuestas

1. Fíjate en el mapa siguiente, localiza los países o ciudades que se piden e indica en tu cuaderno:



a) Los cuadrantes donde se encuentran los siguientes países:

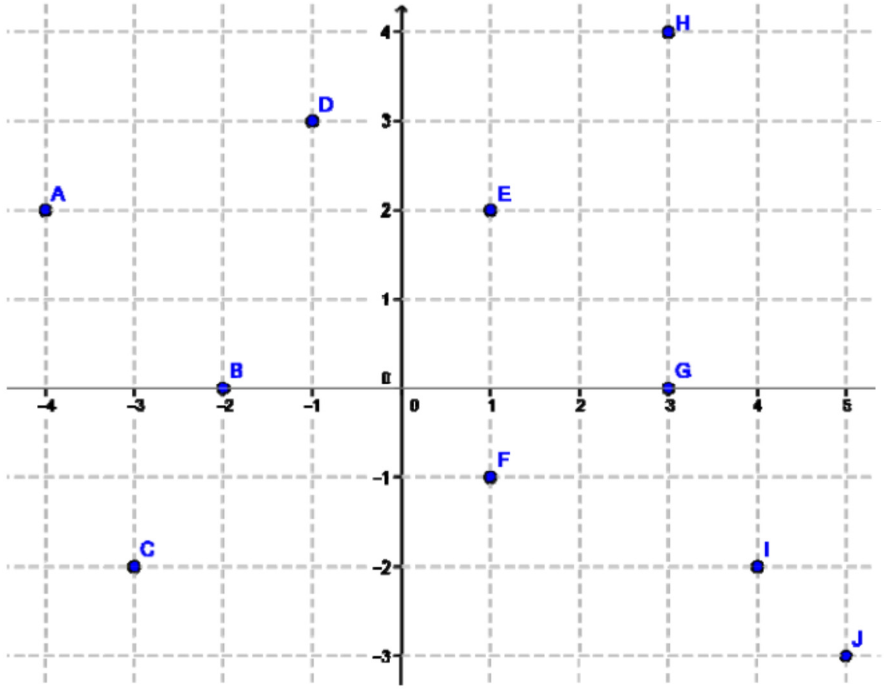
- Méjico:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Argentina:
- Australia:
- Japón:
- Arabia Saudí:
- Alemania:
- EEUU:
- Marruecos:

b) Las coordenadas (aproximadas) de las siguientes ciudades:

- Ciudad del Cabo:
- Nueva York:
- Río de Janeiro:
- Alicante:
- Pekín:
- Rabat:
- Sídney:
- Oviedo:
- Londres:
- Córdoba:

2. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

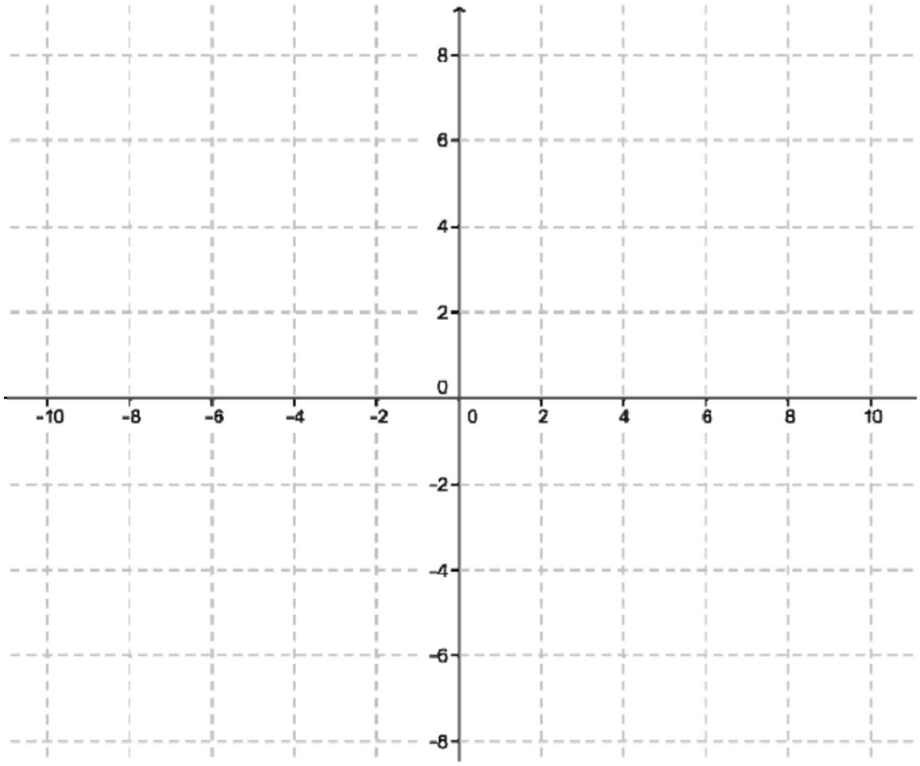
Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández



3. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano:

A (0,-2) *B* (-2,0) *C* (4,0) *D* (-6,0) *E* (0,6) *F* (1,7) *G* (7,1) *H* (-4,8) *I* (-1,-4) *J* (-4,-1)

K (5,-3) *L* (9,6) *M* (-2,1) *N* (7,-4) *Ñ* (-3,-3) *O(0,0)* *P(-2,-1)* *Q*(2,1) *R*(2,-1) *S*(-2,1)



Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

2. FUNCIONES

2.1. Concepto intuitivo de función.

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un billete en un medio de transporte y la distancia o tiempo de duración del viaje, el precio de un kilo de fruta o carne y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos, el número de latidos del corazón en una unidad de tiempo…

Muchas de esas relaciones se rigen por una ley de proporcionalidad, directa o inversa, pero hay otras muchas en las que la correspondencia entre ambas magnitudes es más compleja.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).

Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica… ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

Ejemplos:

- *Un kilo de tomates cuesta* 0,59 €/kg. *La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es y = f(x) =* 0,59 *x.*

  En ella, ***f*** es el nombre que le ponemos a la función y podríamos llamarla usando otras letras (las que se usan más frecuentemente son “*f*”, “*g*” y “*h*”). Entre paréntesis va la variable “***x***” que representa el número de kilos que compramos, y es la variable independiente puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad que queremos o necesitamos. Por último, la variable “***y***” representa el precio que debemos pagar, y es la variable dependiente puesto que “depende” de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de “*x*”.

  La expresión, *f*(x) que se lee “*f* de *x*”, se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque:

  1º) en ella se ve cuál es la variable independiente y, por tanto:

  2º) resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 2 kg. Se expresaría “*f* de *2*” y su valor es *f*(2) = 0,59·2 = *1,18 €*.

- *Una persona que va paseando siempre a la misma velocidad, quiere recorrer una calle recta de* 1 *km en un tiempo determinado. La relación entre el tiempo que tardará (en segundos) y la velocidad que lleva (en metros por segundo) viene dada por la fórmula* $v(t)=\dfrac{1000}{t}$.

  En ella, “***v***” es el nombre de la función velocidad, 1000 son los metros que tiene que recorrer y “***t***” el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

- Todos los números decimales tienen su parte entera y su parte decimal. Pues bien, todo número real se puede relacionar de forma única con el *número entero inmediatamente inferior*, llamado su "*parte entera*" y representado $E(x)$. El hecho de que este número sea único hace que nos encontremos ante una función.
  Por ejemplo, la parte entera de 8,3 es 8: $E(8'3)=8$; la de -4,2 es -5: $E(-4'2)=-5$ …
  Pues bien, esta función, a pesar de su sencilla descripción mediante palabras que nos dicen qué debemos hacer, no se puede escribir mediante una fórmula algebraica.

Actividades propuestas

4. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad – altura de la persona a lo largo de su vida
b. Altura – edad de la persona
c. Precio de la gasolina – día del mes
d. Día del mes – precio de la gasolina
e. Un número y su quinta parte
f. Un número y su cuadrado
g. Un número y su raíz cuadrada

5. Si hoy el cambio € a $ está 1 € = 1,37 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	60
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?
Sin realizas el cambio en una oficina, te cobran una pequeña comisión fija por realizar la operación de 1,5 €. ¿Cómo quedaría/n la fórmula/s en este caso?

6. El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 746 pies de altura, están separadas por una distancia de 4200 pies aproximadamente. La calzada, que tiene una anchura de 90 pies y se encuentra a una altura de 220 pies sobre el nivel del agua, está sujeta a las torres mediante dos cables, de 3 pies de diámetro, que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente.

-Realiza un dibujo donde queden reflejados los datos más significativos del problema.
-Determina la relación que existe entre la altura a la que se encuentra un punto del cable y la distancia de su proyección vertical al centro del puente.
-Aplicar dicha fórmula para calcular la altura de un punto del cable cuya vertical está a 1000 pies del centro del puente.

2.2. Gráfica de una función.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

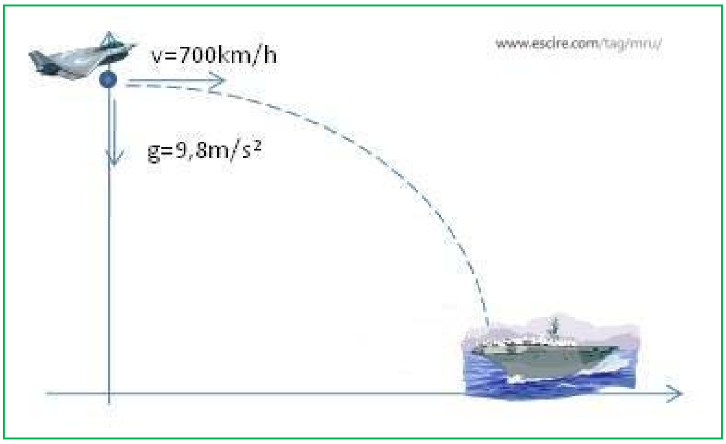
Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujarlos ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que podamos hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante puesto que nos hace mucho más concreto un concepto muy abstracto, al poder visualizarlo: “más vale una imagen que mil palabras”.

Ejemplo:

- *La trayectoria que debe seguir un avión para aterrizar en un portaviones se corresponde con la representación de la función que relaciona la distancia recorrida por el mismo dependiendo del tiempo que tarda en recorrerla:*

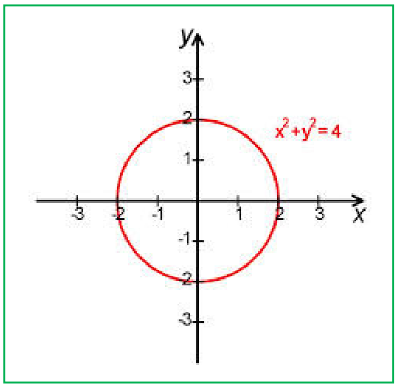


Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.

Ejemplo:

- El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor **0** de la variable independiente le corresponden los valores **2** y –**2** de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, por lo que **no** puede ser la representación de una función.

  La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2 + y^2 = 4$ o, también, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

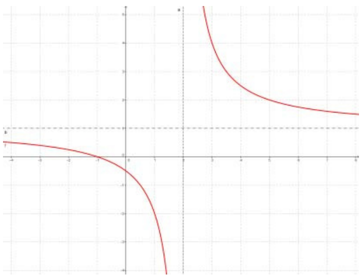


La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:

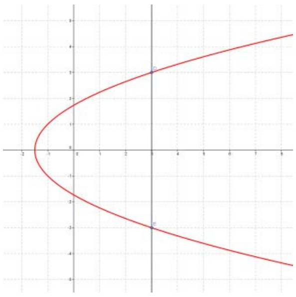
$$\{(x, y) \mid x \in \Re,\ y = f(x)\}$$

Actividades resueltas

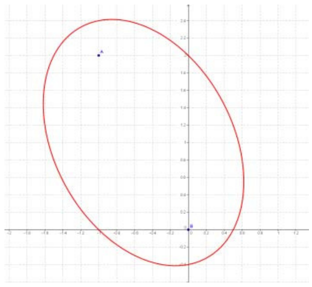
- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



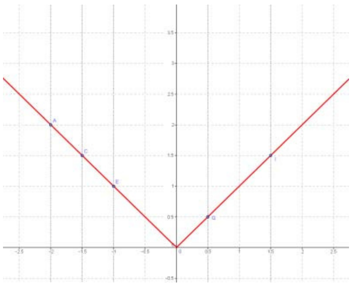
SÍ



NO



NO



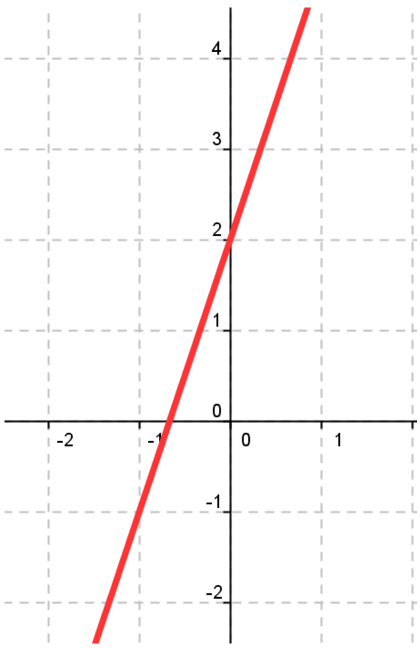
SÍ

¿Cuál es la clave o regla para saber, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no? ***Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. En otro caso, no.***

- *Dibuja en el plano cartesiano los valores de la siguiente tabla y conjetura acerca de qué tipo de figura corresponde a la gráfica de la función:*

x	–4	–2	0	1	3
f(x)	–10	–4	2	5	11

GRÁFICA



Observamos que los puntos, al representarlos, están alineados. Por tanto, el dibujo que corresponde a la gráfica de la función es una RECTA.
En este caso, no es demasiado difícil descubrir que la fórmula que relaciona ambas variables es:

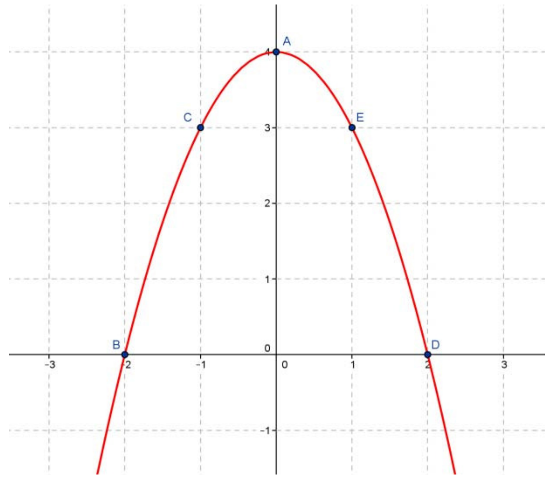
$$f\left(x\right)=3x+2$$

- *Completa la siguiente tabla a partir de la fórmula de la función* $f\left(x\right)=-x^2+4$*, dibuja los puntos en los ejes cartesianos e intenta unirlos mediante una curva:*

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	***0***	***3***	***4***	***3***	***0***

La curva obtenida recibe el nombre de **PARÁBOLA** (que es una de las cuatro cónicas).

GRÁFICA



Actividades propuestas

7. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y la otra no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

8. Realiza en tu cuaderno una tabla con 10 valores de la función $e(t) = 5t + 20$, represéntalos gráficamente e indica la figura que determinan. Si dicha función representa el espacio (en kilómetros) que recorre una persona que lleva andados 20 km y camina a una velocidad de 5 km/h, en función del tiempo que tarda en recorrerlo (en horas), indica cuáles serían los valores que no tendría sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

9. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–13	–7	10	–13	24
$f(x)$	–15	0	14	3	0

10. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. ¿Cuál es su área? Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

11. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

12. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 4 cm y de altura total del vaso 24 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

2.3. Ejemplos de funciones: función afín y cuadrática.

Durante todos los apartados anteriores hemos ido analizando distintos ejemplos de relaciones entre dos variables que eran función y otros que no. Lo hemos hecho desde el punto de vista gráfico, de tablas de valores y de fórmulas matemáticas.

En esta sección, simplemente vamos a analizar unos cuantos ejemplos de funciones que son bastante sencillas y que tienen bastantes aplicaciones prácticas.

Una **función afín** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno:

$$y = f(x) = mx + n.$$

Su representación gráfica es siempre una **recta**, su **pendiente** es el coeficiente líder (m) e indica la inclinación de la misma (si es positivo la recta será **creciente** y si es negativo **decreciente**) y su **ordenada en el origen** (n) es el término independiente, que nos proporciona el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Ejemplo:

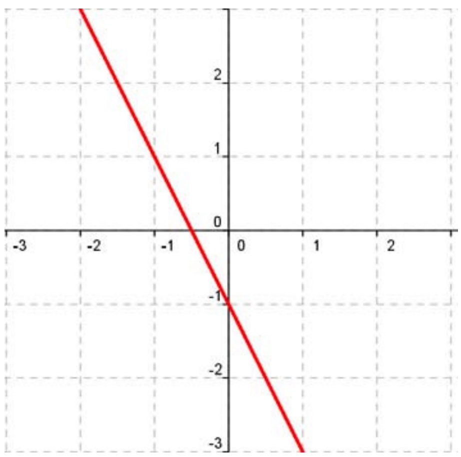
- $y = \mathbf{-3}x\mathbf{ - 1}$ (polinomio de primer grado)

x	–2	–1	–1/2	0	1
$f(x)$	3	1	0	**–1**	**–3**
	(–2, 3)	(–1, 1)	(–1/2, 0)	(0, –1)	(1, –3)

Pendiente: **–3** $\Rightarrow$ recta decreciente

Ordenada en el origen: **–1** $\Rightarrow$ **(0, –1)** punto de corte de la recta con el eje de ordenadas

GRÁFICA



Como casos particulares de funciones afines tenemos:

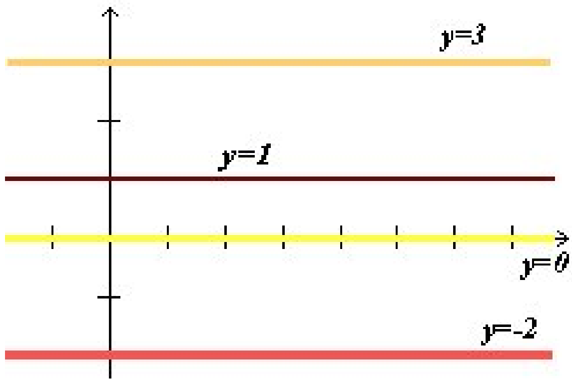
Función constante (recta horizontal): es aquella que siempre toma el mismo valor para todos los valores de la variable independiente (la pendiente es nula):

$$y = n$$

Ejemplo:

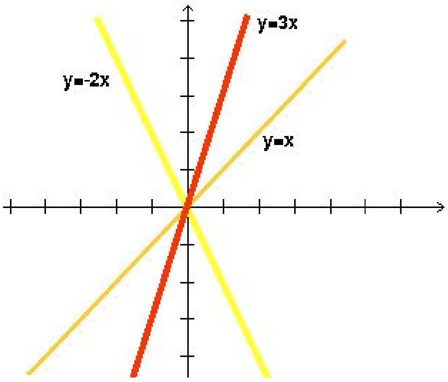
- Gráficas de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.

Por tanto, la recta no tiene inclinación, es decir, es paralela al eje de abscisas.



Observa que

La ecuación del eje de abscisas es $y = 0$.



Función lineal o **de proporcionalidad directa**: es aquella que tiene ordenada en el origen igual a **0** (pasa por el origen de coordenadas): $y=mx$

Cada valor de "***y***" conserva una misma proporción respecto al de "***x***":

$y = 3x$ (*y* es el triple de *x*)

$y = -2x$ (*y* es el opuesto del doble de *x*)

$y = x$ (**función identidad**: *y* es igual a *x*)

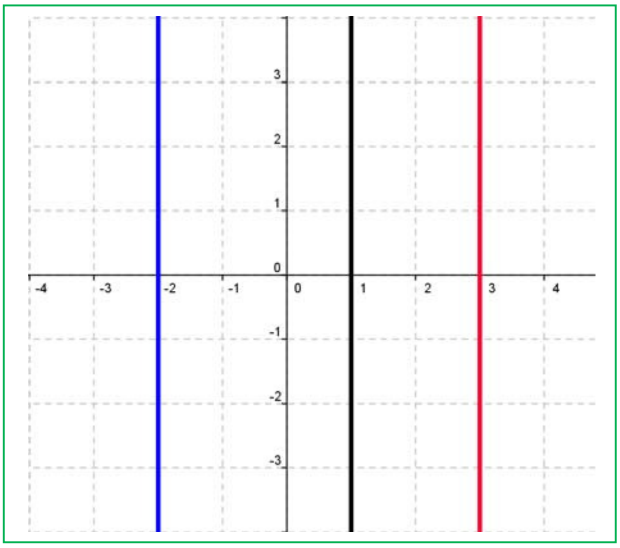
Observa que:

La gráfica de *x* = *a* es una recta vertical, pero no es una función porque para el valor de la variable independiente "*a*", la ordenada toma infinitos valores.

Ejemplo:

- Dibuja la gráfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.

La ecuación del eje de ordenadas es *x* = 0.



Actividades propuestas

13. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas de que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 3, –2, y 1/2 respectivamente.

14. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = *x*? ¿Y la recta *y* = –x?

15. Un metro de cierta tela cuesta 1,35 €, ¿cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 m? ¿Y 12,5 m? ¿Cuánto cuestan "*x*" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

16. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:
a) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es 3.
b) Pasa por los puntos *A*(1, 3) y *B*(0, 4).
c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
d) Pasa por los puntos *C*(–1, 3) y *D*(–2, 5).
e) Pasa por el punto (*a*, *b*) y tiene de pendiente *m*.

17. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

18. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:
a) De pendiente 3 y ordenada en el origen 0.
b) Pasa por los puntos *A*(2, 3) y *B*(4, 1).
c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).